

Estudos do I.S.C.A.A II Série • Nº 2 • 1996
Revista de Publicação Anual

Direcção: Joaquim José da Cunha

Coordenação: José Fernandes de Sousa
Vírginia Maria Granate Costa e Sousa

Conselho Consultivo: Professores Coordenadores das Áreas
Científicas do I.S.C.A.A.

Edição e Propriedade: Instituto Superior de Contabilidade e
Administração de Aveiro

Apoio Administrativo e Assinaturas: Biblioteca do I.S.C.A.A.
R. Associação Humanitária dos Bombeiros Velhos de Aveiro
Apart. 58 - 3800 - Aveiro
Tel.: (034) 381977 - 381911; Fax: (034) 28975

Preço: 1.500\$00

ISSN: 0873-2019

Depósito legal nº: 922 54/95

Capa: Design. Francisco Espindola

Trat. de texto: apoio técnico de Maximina Gonçalves Marieiro

Impressão: Tipografia Minerva Central, Lda./1997

*A Derivação das Funções de Custo.
O Problema da Minimização.*

*Margarida Maria Solteiro Martins Pinheiro
Professora Adjunta de Matemática
I.S.C.A.A.*

Sumário:

O presente artigo faz parte de um dos temas discutidos no concurso de provas públicas para Professores-Adjuntos do Ensino Superior Politécnico, realizado em Dezembro de 1994. Após uma abordagem dos métodos de optimização clássicos, pretendeu-se aplicar a teoria matemática da determinação de máximos e mínimos, de funções com várias variáveis sujeitas a restrições, à resolução de um problema económico de minimização de custos. De modo a melhor elucidar a técnica utilizada, o artigo termina com a concretização de um problema aplicado a uma função específica em economia.

Introdução

Chamamos factores de produção a todos os inputs que entram no processo de fabrico de um produto. Entenda-se aqui input não só o material em si, como também capital, trabalho, espaço, etc. (Muitas vezes utilizaremos o termo “bens” em vez de inputs). Ao conjunto de todos os factores de produção, isto é, de todos os inputs e aos resultados finais obtidos, chamamos conjunto de produção. E, uma vez que para obter um input é necessário um pagamento, uma questão importante é a de saber como maximizar o resultado final, dado um nível inicial de input. À função que limita o conjunto produção, chamamos função produção. Ou seja, a função produção relaciona a quantidade de produto final que é possível obter a partir de um dado nível de factores de produção, para uma dada tecnologia, num determinado periodo de tempo.

A Função Produção

Podemos falar em inputs fixos e em inputs variáveis.

Quando, na função produção, todos os inputs são fixos, à excepção de um, dizemos que estamos em presença de uma função produção com factores fixos. Quando este tipo de relação ocorre falamos em função produção a curto prazo. Por exemplo, no caso de haver dois tipos de input, 1 e 2 a função produção $f(x_2, \bar{x}_1)$ com x_1 fixo, mede o máximo de produto final que é possível obter a partir de \bar{x}_1 unidades do bem 1 e de x_2 unidades do bem 2.

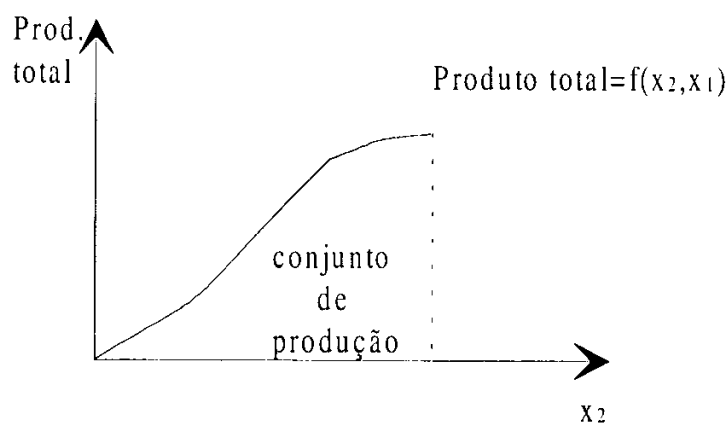


Figura 1 - Função Produção com um factor fixo \bar{x}_1

A fim de que, reunindo input se possa obter o produto final da maneira mais eficiente possível, precisamos de utilizar determinado caminho, a que chamaremos processo de produção, ou seja, de uma forma abrangente, o processo de produção pode ser definido como a técnica por meio da qual um ou mais produtos vão ser obtidos a partir da utilização de determinadas quantidades de factores de produção, usando os meios mais eficientes de produção.

Quando, na função produção, todos os inputs são variáveis, dizemos que estamos em presença de uma função produção com factores variáveis. Quando este tipo de relação ocorre falamos em função produção a longo prazo. Vejamos como o conceito de função produção se adopta ao caso de haver vários inputs envolvidos no processo. Por exemplo, no caso de haver dois factores de produção 1 e 2 a função produção $f(x_1, x_2)$ mede o máximo de produto final que é possível obter a partir de x_1 unidades do bem 1 e de x_2 unidades do bem 2. Neste caso (no caso de só haver dois bens envolvidos) podemos ainda representar, de um modo fácil e intuitivo todas as possíveis combinações das matérias 1 e 2 que são necessárias à obtenção de determinada quantidade de produto final. Ao conjunto de todas essas possíveis combinações, chamamos isoquanta.

Convém desde já observar que, atendendo às definições apresentadas, a função produção é, por hipótese, contínua, deve ser definida no tempo e está unicamente definida para quantidades positivas de x_1 e x_2 dos inputs e do produto final q

Vejamos alguns exemplos de função produção.

a) função produção com factores fixos.

A mais simples das funções de produção que são habitualmente utilizadas é a de função produção de factores fixos que vamos representar analiticamente por $f(\bar{x}_1, x_2) = \min\{\bar{x}_1, x_2\}$

b) função produção com factores variáveis.

Um caso importante é o da função C.E.S. (constant elasticity of substitution). A sua expressão analítica é da forma

$$f(x_1, x_2) = A[\delta x_1^{-\rho} + (1-\delta)x_2^{-\rho}]^{-\frac{1}{\rho}}$$

onde δ e ρ são parâmetros, estando ρ relacionado com a elasticidade

de substituição pela fórmula seguinte $\sigma = \frac{1}{1+\rho}$, sendo σ a elasticidade de

substituição. (A elasticidade de substituição relaciona as variações relativas na intensidade de utilização dos factores com a variação relativa das produtividades marginais - a definir posteriormente - Simbolicamente, representando por σ a elasticidade de substituição e por PM_1 a

produtividade marginal do factor 1, temos $\sigma = \frac{\delta \ln(\frac{x_2}{x_1})}{\delta(\frac{PM_1}{PM_2})}$).

Particularizando para $\sigma=1$ e recorrendo à regra de L'Hôpital, encontramos outro caso frequentemente usado que é o da função produção Cobb-Douglas, do tipo $f(x_1, x_2) = Ax_1^a x_2^b$ com $x_1, x_2 > 0$ e $A > 0$. O parâmetro A mede, a quantidade de produto obtido por cada unidade utilizada do factor 1 e do factor 2. Os parâmetros a e b medem o quanto do produto obtido se deve à variação dos valores de x_1 e x_2 .

Produto Marginal e Taxa Marginal de Substituição Técnica

Estudemos agora um conceito fundamental na teoria microeconómica: o de produto marginal.

Designemos por 1 e 2 as variáveis envolvidas no processo de produção por x_1 e x_2 as quantidades das variáveis 1 e 2, respectivamente e por y a quantidade de produto total. Podemos pensar na seguinte questão: "Em quanto varia o valor de y se, uma vez fixada a quantidade x_2 , fizermos variar o factor 1 de uma unidade? Para dar resposta a esta questão definimos

produto marginal do factor 1, ($PM_1(x_1, x_2)$) ou mais simplesmente PM_1 como o quociente entre a variação do produto final, quando o factor 1 sofre uma variação unitária; simbolicamente

$$PM_1 = \frac{\Delta y}{\Delta x_1} = \frac{f(x_1 + \Delta x_1, \bar{x}_2) - f(x_1, \bar{x}_2)}{\Delta x_1}$$

Analogamente definimos produto marginal do factor 2.

De um modo pouco rigoroso, podemos descrever o produto marginal do factor 1 como o aumento extra de produto final que obtemos ao aumentarmos de uma unidade o factor 1. Convém no entanto recordar que o produto marginal, do modo que foi definido é sempre o acréscimo verificado na produção quando se utiliza mais uma unidade de um factor. No caso particular da função em causa ser contínua, o produto marginal toma a

forma $PM_1 = \frac{dy}{dx_1}$.

Suponhamos agora outra situação: pretendemos saber o quanto podemos prescindir do factor 1 de tal forma que, aumentando o factor 2 na medida certa, obtenhamos exactamente a mesma quantidade de produção. Ou seja, de que quantidade extra do factor 2, Δx_2 , precisamos se podemos prescindir de uma pequena quantidade do factor 1, Δx_1 , de modo a obter o mesmo nível do produto final?

A resposta é dada pela noção de taxa marginal de substituição técnica, simbolicamente $TMST(x_1, x_2)$.

Para determinar a expressão analítica da taxa marginal de substituição técnica, consideremos as variações nas quantidades dos factores 1 e 2 que mantêm constante o nível de produção.

$$\Delta y = f(x_1 + \Delta x_1, x_2) + f(x_1, x_2 + \Delta x_2) = 0$$

ou seja

$$\Delta y = \frac{f(x_1 + \Delta x_1, x_2)}{\Delta x_1} \Delta x_1 + \frac{f(x_1, x_2 + \Delta x_2)}{\Delta x_2} \Delta x_2$$

$$\Delta y = PM_1 \Delta x_1 + PM_2 \Delta x_2$$

$$-\frac{\Delta x_2}{\Delta x_1} = \frac{PM_1}{PM_2}$$

A esta razão chamamos taxa marginal de substituição técnica e dá a resposta à pergunta anterior, isto é,

$$TMST_{(x_1, x_2)} = - \frac{\Delta x_2}{\Delta x_1} = \frac{PM_1}{PM_2}$$

Ou seja, a taxa marginal de substituição técnica não é mais do que o quociente entre os produtos marginais dos factores de produção. No campo contínuo, tomando-se o limite da relação $-\frac{\Delta x_2}{\Delta x_1}$ quando Δx_1 tende para

zero, temos $TMST = -\frac{dx_2}{dx_1}$. Note-se que, numa isoquanta, para haver

eficiência é necessário que as produtividades marginais sejam positivas.

Analisemos agora o gráfico seguinte:

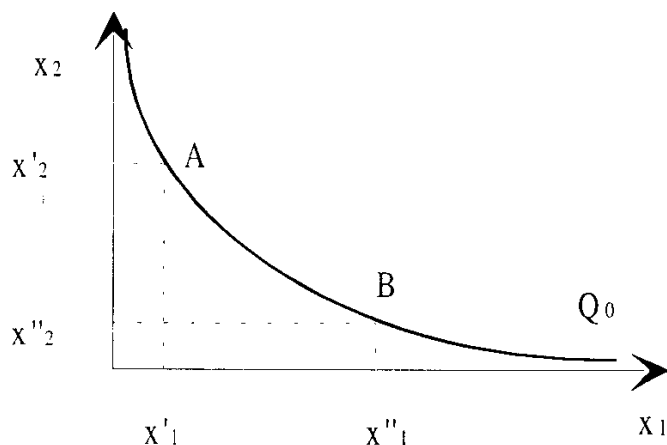


Figura 2 - Análise da variação dos factores

Ao passar do ponto A para o ponto B da isoquanta, reduziu-se a utilização do factor x_2 de $-\Delta x_2$ e aumentou-se a utilização do factor x_1 de $+\Delta x_1$. O nível de produção permaneceu constante e igual a Q_0 .

Se essas mesmas variações fossem em termos infinitesimais, o ponto A tendia a aproximar-se de B e a taxa marginal de substituição técnica seria representada por $-\frac{dx_2}{dx_1}$ e teríamos a TMST num ponto. Ou seja, a TMST é

dada pelo simétrico do declive da tangente à isoquanta, em cada um dos seus pontos. Logo, podemos afirmar que o declive da isoquanta é igual ao simétrico da TMST. Como essa taxa é sempre positiva, por convenção,

conclui-se que o declive de uma isoquanta é sempre negativo. Ainda analisando o gráfico e se tomarmos o valor da TMST em termos absolutos, vemos que esta é decrescente ao longo da curva o que traduz a ideia de que se está disposto a renunciar cada vez menos a x_2 para obter mais uma unidade de x_1 .

Esta relação vai ter uma aplicação importante quando considerarmos a questão de como obter um determinado nível de produção ao menor custo possível.

Custo de Produção

Os exemplos discutidos até agora, colocam a empresa perante a oportunidade de comprar apenas dois inputs diferentes. É desnecessário dizer que esta não é uma situação real. De uma forma muito geral os problemas orçamentais da empresa podem ser colocados como uma escolha entre não apenas dois, mas n inputs, em que n pode ser um número muito elevado. Considerando apenas dois bens ($n=2$), a isocusto é uma linha recta, como veremos posteriormente. Considerando três bens ($n=3$), é um plano. Quando temos mais de três bens, a isocusto transforma-se naquilo a que os matemáticos chamam hiperplano ou plano multidimensional.

Genericamente, podemos representar uma função produção tal que $q = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, representando x_1, x_2, \dots, x_n as quantidades utilizadas dos factores, durante um certo período de tempo.¹

Após nos termos referido brevemente à teoria da produção, vamos agora debruçar-nos sobre a teoria dos custos. O objectivo seguinte é pois o de traduzir a teoria da produção numa teoria de custo coerente.

A teoria do custo é de primordial importância na tomada de decisões. De facto, o princípio básico que norteia o comportamento de uma empresa é

¹ Tudo o que foi dito para a empresa pode ser visto em termos de consumidor porque, parafraseando os autores neoclássicos, a satisfação das necessidades do consumidor não é mais do que uma produção. Alfred Marshall (séc. xix) propôs uma solução muito simples para este problema. É considerar a escolha do consumidor como uma escolha entre um bem particular, chamemos-lhe 1, e uma amálgama de outros bens, designados por 2. Actualmente esta amálgama é conhecida por dois nomes: dinheiro marshalliano ou bem composto. Podemos pensar no bem composto como a quantidade de rendimento com que o consumidor fica de pois de comprar o bem 1.

análogo àquele que condiciona o desempenho de um consumidor individual, que é o da maximização dos resultados.

Vejam os como o conceito de custo pode ser entendido de maneira simples. Já dissemos que, para obtermos os produtos finais, é necessário dispor de uma certa variedade de inputs, inputs esses que têm os seus custos. O pagamento total que deve ser feito para se poder usar esses factores é designado custo total da produção.

Apesar de, à primeira vista, o conceito de custo parecer de fácil entendimento, alguns problemas se levantam. De facto, o conceito mais frequente de custo é um conceito monetário. Ora, tal noção não é inteiramente correcta. Distinguimos assim entre custos explícitos e custos implícitos. Designamos por custos explícitos as despesas com a compra ou aluguer de factores de produção. São exemplos de custos explícitos a compra de materiais, o pagamento de salários, o aluguer de instalações. Por outro lado, são exemplos de custos implícitos o salário do empresário, o equipamento da empresa ou os seguros da empresa. Não sendo este tipo de custo tão óbvio como o custo explícito, põe-se o problema de como o determinar. Definimos então um novo conceito: o do custo de oportunidade. De acordo com este princípio “o custo de um input (é a oportunidade perdida) é o valor que teve de ser renunciado em não o utilizar da melhor maneira possível”.

Isocustos

O nosso objectivo é o de minimizar os custos de produção, na obtenção de um certo nível de produto final; isto é a procura do ponto óptimo.

Podemos seguir duas vias: minimizar os custos sujeitos à restrição da quantidade a produzir ou maximizar a produção para uma despesa total em factores fixa. No presente trabalho optou-se pelo primeiro processo. Para o segundo caso os procedimentos seriam semelhantes embora com o objectivo de maximização. Em ambos os casos as conclusões finais são exactamente as mesmas.

Para resolver este problema de minimização, começemos por determinar quais as possíveis combinações de quantidades de input que são possíveis de obter uma vez fixado o custo total.

Definimos isocusto (ou curva de igual custo) como o lugar geométrico dos pontos representativos de combinações de quantidades utilizadas dos factores, para um mesmo custo total.

i) Representação analítica de isocusto

Considerem-se dois factores de produção que dão origem a um único produto final. Suponham-se as condições de produção homogéneas e que se trata de uma função produção a longo prazo, isto é, em que ambos os factores são variáveis. E, sendo os factores variáveis os custos também são variáveis.

Designemos por x_1 e x_2 as quantidades dos factores de produção e por w_1 e w_2 os preços de uma unidade de cada factor, respectivamente. (É claro que supomos $w_1 > 0$ e $w_2 > 0$). Então, a função isocusto para um certo nível de custo n pode ser escrita tal que $C = w_1 x_1 + w_2 x_2$.

Para se obterem as diferentes quantidades de x_1 ou x_2 ao longo da mesma recta de isocusto, deve-se resolver a expressão anterior em ordem a x_1 ou x_2 . Resolvendo em ordem a x_2 , vem $x_2 = -\frac{w_1}{w_2} x_1 + \frac{C}{w_2}$.

Facilmente se vê que esta não é mais do que a expressão analítica de uma recta, de declive negativo $-\frac{w_1}{w_2}$ e ordenada na origem $\frac{C}{w_2}$. Fazendo variar o valor de C , obtemos uma família de rectas de isocusto. Observe-se que, por definição, cada ponto de uma recta de isocusto tem o mesmo custo C e curvas de isocusto superior estão associadas a valores superiores do custo C .²

² a) Evidentemente, se o custo fosse hipoteticamente dependente apenas da utilização de certa quantidade x_1 , o custo seria $C = w_1 x_1$. Do mesmo modo procederíamos se a produção só dependesse do segundo factor.

b) Num processo a curto prazo, o factor fixo (digamos \bar{x}_2) tem um custo fixo dado pelo preço unitário desse factor, w_2 e o factor variável tem um custo variável; o custo seria então $C = w_1 x_1 + w_2 \bar{x}_2$

ii) Representação gráfica de isocusto

Na representação gráfica de uma isocusto, utilizemos um referencial cartesiano onde, nos eixos vertical e horizontal figurem as quantidades físicas, possíveis de serem utilizadas, dos dois factores.

Como vimos na representação analítica de uma isocusto, existem várias alternativas de combinação das quantidades x_1 e x_2 dos factores produção utilizados na obtenção de determinados bem, de forma a que o somatório do produto dessas quantidades pelo preço de cada factor, resulta no mesmo valor do custo total.

Como uma isocusto é uma recta e para a representar graficamente, bastará, para um mesmo nível de custo n , determinar dois pontos da recta, digamos os pontos de intersecção com os eixos coordenados.

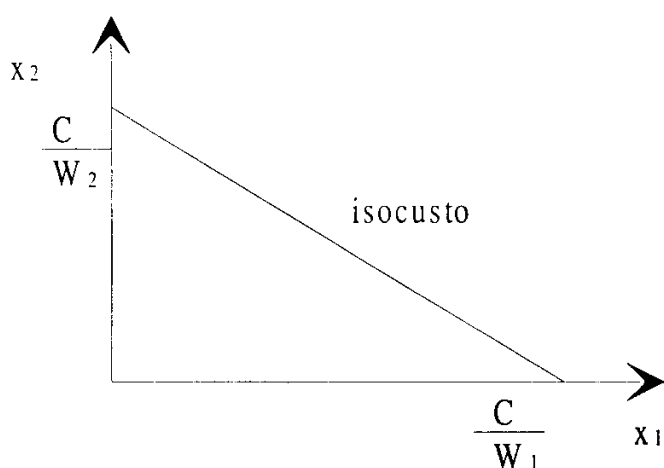


Figura 3 -Representação geométrica de uma isocusto

Métodos de Optimização Clássicos

Os métodos de optimização clássicos são úteis na procura da solução óptima de uma função contínua e diferenciável. São métodos analíticos e fazem uso das técnicas do cálculo diferencial na procura do ponto óptimo. Apesar de a maior parte dos problemas envolver funções descontínuas e/ou não diferenciáveis, os métodos clássicos constituem a base de desenvolvimento de novos métodos.

Vamos pois referir neste capítulo, condições necessárias e suficientes na procura do óptimo de uma função, para diferentes formulações do problema.

- Funções com uma única variável -

Definição 1

Uma função $f(x)$ tem um mínimo relativo ou local no ponto $x = x^*$ se $f(x^*) \leq f(x^* + h)$, para valores de h suficientemente pequenos.

Analogamente, um ponto x^* diz-se um máximo relativo ou local da função $f(x)$ se $f(x^*) \geq f(x^* + h)$, para valores de h suficientemente próximos de zero.

Definição 2

Diz-se que a função $f(x)$ tem um mínimo global ou absoluto no ponto $x = x^*$ se $f(x^*) \leq f(x)$, para qualquer valor de x pertencente ao domínio da função (não apenas para pontos numa vizinhança de x^*).

Analogamente, um ponto x^* é um máximo global ou absoluto de $f(x)$, se $f(x^*) \geq f(x)$, para qualquer ponto x do domínio da função.

Definição 3

Ao máximo e mínimo de uma função, chamamos extremos da função.³

³ A partir de agora e sempre que se nos afigurar útil faremos o estudo, salvo indicação em contrário, apenas para os mínimos, uma vez que para os máximos basta considerar a função simétrica. Assim e sem perda de generalidade, optimização pode entender-se como minimização já que, o máximo de uma função pode ser encontrado procurando o mínimo da função simétrica.

Os teoremas 1 e 2 que se seguem indicam, respectivamente, condições necessárias e condições suficientes para a determinação do mínimo relativo de uma função com uma única variável (Rao, 1979).

Teorema 1

Se uma função $f(x)$ está definida no intervalo $[a,b]$, tem um mínimo relativo no ponto $x = x^*$ com $a < x^* < b$ e ainda se existe e é finita $\frac{df}{dx} = f'(x)$ no ponto $x = x^*$, então $f'(x^*) = 0$

(A um ponto onde $f'(x^*) = 0$ chamamos ponto estacionário)

Teorema 2

Sejam $f''(x^*) = f'''(x^*) = \dots = f^{(n-1)}(x^*) = 0$ e $f^{(n)}(x^*) \neq 0$.

Então $f(x^*)$ é:

- i) um mínimo de $f(x)$ se $f^{(n)}(x^*) > 0$ e n é par;
- ii) um máximo de $f(x)$ se $f^{(n)}(x^*) < 0$ e n é par;
- iii) nem máximo nem mínimo se n é ímpar.

- Funções com várias variáveis sem restrições -

Apresentamos agora o caso da determinação de extremo de uma função com várias variáveis, não sujeitas a restrições. As demonstrações envolvem desenvolvimentos em série de Taylor. (.Rao, 1979)

Teorema 3

Se $f(x)$ (onde x é um vector de n componentes) tem um extremo no ponto $x = x^*$ e se existe a primeira derivada parcial de $f(x)$ no ponto x^* , então

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x^*) = \frac{\partial f}{\partial x_2}(x^*) = \dots = \frac{\partial f}{\partial x_n}(x^*) = 0$$

Teorema 4

Uma condição suficiente para um ponto estacionário x^* ser um ponto extremo da função é que a matriz Hessiana (matriz formada pelas segundas derivadas parciais) de $f(x)$, calculada no ponto x^* seja:

- i) definida positiva se x^* é um mínimo;
- ii) definida negativa x^* se é um máximo.⁴

- funções com várias variáveis em que as restrições são expressas por igualdades -

O problema clássico da optimização é o de minimizar uma dada função (função objectivo) em que as variáveis estão sujeitas a restrições. Simbolicamente, pretende-se minimizar a função

$$z = f(x) \text{ sujeita a restrições } g_i(x) = b_i, \text{ com } i = 1, 2, \dots, m, \quad (1)$$

em que as funções f e g_i são supostas possuírem derivadas parciais de 1ª ordem com respeito a todas as variáveis e x é um vector de n componentes. As restrições são supostas independentes. De entre os vários métodos de resolução deste problema, iremos abordar em particular o dos multiplicadores de Lagrange. A ideia básica envolve uma função particular que designamos por função de Lagrange de modo a converter o problema com restrições (1) num problema sem restrições.

Definição 4

Diz-se que uma função $f(x)$ tem um máximo local ligado em $x = x^*$ se existe um $\varepsilon > 0$ tal que $f(x) \leq f(x^*)$ para todo o x satisfazendo $|x - x^*| < \varepsilon$ e as ligações de (1).

Para um problema de optimização sem restrições (ligações), diremos que $f(x)$ tem um máximo local em $x = x^*$ se a definição anterior é válida, ainda que omitindo a referência às ligações de (1).

⁴ Uma matriz A diz-se definida positiva se todos os seus valores próprios são positivos. Os valores próprios são os valores de λ que são soluções da equação $|A - \lambda I| = 0$.

Definição 5

Diz-se que uma função $f(x)$ tem um mínimo local ligado em $x = x^*$, se existe $\varepsilon > 0$ tal que $f(x) \geq f(x^*)$ para todo o x satisfazendo $|x - x^*| < \varepsilon$ e as ligações de (1).

De modo análogo ao anterior, se o problema não tem restrições, dizemos que a função $f(x)$ tem um mínimo local ligado em $x = x^*$ se a definição anterior é válida, com omissão das ligações de (1).

i) Condições necessárias para a existência de um mínimo local ligado

No método dos multiplicadores de Lagrange, vamos introduzir uma nova variável para cada restrição. Ou seja, ao problema original que tinha n variáveis e m restrições, adicionamos m novas variáveis pelo que, no total, temos $n+m$ variáveis. É claro que há simplificações com a introdução destas novas variáveis, ou não teria sentido o exercício. A essência deste método é converter um problema de extremos condicionados de tal forma que as condições para a determinação de extremos não condicionados, sejam aplicáveis. Para exemplificar o processo, comecemos por considerar o problema mais simples de duas variáveis e uma restrição. Posteriormente analisaremos o caso geral.

a) Um caso particular: o caso de duas variáveis e uma restrição

Teorema 5

Seja $f(x_1, x_2)$ uma função sujeita à restrição $g(x_1, x_2) = 0$. É condição necessária para que $f(x_1, x_2)$ tenha um ponto extremo em (x_1^*, x_2^*) que

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{\partial g}{\partial x_2} - \frac{\partial f}{\partial x_2} \frac{\partial g}{\partial x_1} \right) \bigg|_{(x_1^*, x_2^*)} = 0 \quad (2)$$

(Rao, 1979).

Supondo $\frac{\partial g}{\partial x_2}(x_1^*, x_2^*) \neq 0$ podemos reescrever a equação (2) tal que

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1} - \frac{\frac{\partial f}{\partial x_2}}{\frac{\partial g}{\partial x_2}} \frac{\partial g}{\partial x_1} \right) \Big|_{(x_1^*, x_2^*)} = 0 \quad (3)$$

Designemos por λ a quantidade

$$\lambda = - \left(\frac{\frac{\partial f}{\partial x_2}}{\frac{\partial g}{\partial x_2}} \right) \quad (4)$$

que denominamos multiplicador de Lagrange. Substituindo em (3) vem

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1} + \lambda \frac{\partial g}{\partial x_1} \right) \Big|_{(x_1^*, x_2^*)} = 0 \quad (5)$$

De modo análogo, reescrevendo a equação (4) encontramos

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_2} + \lambda \frac{\partial g}{\partial x_2} \right) \Big|_{(x_1^*, x_2^*)} = 0 \quad (6)$$

E, é claro, que a restrição é válida, em particular, no ponto extremo; isto é, $g(x_1^*, x_2^*) = 0$. Resumindo, as condições necessárias para que o ponto (x_1^*, x_2^*) seja um extremo ligado são:

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} + \lambda \frac{\partial g}{\partial x_1} \right) \Big|_{(x_1^*, x_2^*)} = 0 \\ \left(\frac{\partial f}{\partial x_2} + \lambda \frac{\partial g}{\partial x_2} \right) \Big|_{(x_1^*, x_2^*)} = 0 \\ g(x_1^*, x_2^*) = 0 \end{cases} \quad (7)$$

⁵ Mas as condições expressas em (7) poderiam também ter sido determinadas usando uma função do tipo

$$F(x_1, x_2, \lambda) = f(x_1, x_2) + \lambda g(x_1, x_2)$$

designada por função de Lagrange. De facto, calculando as derivadas parciais de $F(x_1, x_2, \lambda)$ em ordem a x_1 , x_2 e λ , respectivamente e igualando a zero, (no ponto (x_1^*, x_2^*)) obteríamos as equações anteriores.

Assim

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x_1} = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial x_2} = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial \lambda} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} + \lambda \frac{\partial g}{\partial x_1} \right) \Big|_{(x_1^*, x_2^*)} = 0 \\ \left(\frac{\partial f}{\partial x_2} + \lambda \frac{\partial g}{\partial x_2} \right) \Big|_{(x_1^*, x_2^*)} = 0 \\ g(x_1^*, x_2^*) = 0 \end{cases} \quad (7.1)$$

b) O caso geral: condições necessárias para a existência de um mínimo local ligado

Suponhamos que $z = f(x)$ tem um mínimo local ligado em $x = x^*$. É sabido que um extremo de f deve anular a sua diferencial total. Por outras

⁵ Observe-se que, ao exigirmos $\frac{\partial g}{\partial x_2}(x_1^*, x_2^*) \neq 0$ na definição de λ , poderíamos

igualmente e sem perda de generalidade, ter exigido $\frac{\partial g}{\partial x_1}(x_1^*, x_2^*) \neq 0$, se tivéssemos

escolhido para variável independente x_2 . Ou seja, a dedução das condições necessárias pelo método dos multiplicadores de Lagrange requer apenas que uma das derivadas parciais $g(x_1, x_2)$ seja não nula, no extremo da função.

palavras, é a condição necessária para que a função $f(x)$ tenha um extremo no ponto x^* que $dz = 0$; isto é

$$df = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i = 0 \quad (8)$$

Mas, como as m equações das restrições são diferenciáveis temos, após diferenciação, o sistema

$$dg_j = \sum_{i=1}^n \frac{\partial g_j}{\partial x_i} dx_i = 0, \dots, j = 1, \dots, m \quad (9)$$

(Rao, 1979).

Multiplicando cada uma das equações de (9) por uma constante λ_j e somando, para todos os valores de j , com (8), formamos uma expressão que designamos por dF tal que

$$dF = df + \sum_{j=1}^m \lambda_j \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial g_j}{\partial x_i} dx_i \right) | x^* \quad (10)$$

Reorganizando as equações (10) de modo a evidenciar os termos em dx_j , temos

$$dF = \sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial f}{\partial x_i} | x^* + \sum_{j=1}^m \lambda_j \frac{\partial g_j}{\partial x_i} | x^* \right] dx_i \quad (11)$$

Mas então $dF = 0$, uma vez que, por (8) e (9) cada uma das parcelas é nula. Atendendo às m restrições de (1), apenas $(n-m)$ das n variáveis x_i são independentes. Suponhamos que são x_{m+1}, \dots, x_n . Vamos agora escolher os λ_i , que até aqui eram arbitrários, tais que os coeficientes das primeiras m variações dx_i sejam nulos. Ou seja, escolhemos λ_i tais que

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^m \lambda_j \frac{\partial g_j}{\partial x_i} = 0, \dots, i = 1, \dots, m \quad (12)$$

Com isto, a equação (11) passa apenas a envolver as variações dx_{m+1}, \dots, dx_n . Mas e porque as variáveis x_{m+1}, \dots, x_n são independentes, os diferenciais dx_{m+1}, \dots, dx_n correspondentes podem ser escolhidos não nulos, permitindo a variação de cada uma delas. Logo

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^m \lambda_j \frac{\partial g_j}{\partial x_i} = 0, \dots, i = m+1, \dots, n \quad (13)$$

De (12) e (13) resulta

$$\frac{\partial f}{\partial x_{ji}} + \sum_{j=1}^m \lambda_j \frac{\partial g_j}{\partial x_i} = 0, \dots, i = 1, \dots, n \quad (14)$$

É claro que é suposto que as restrições são verificadas no ponto extremo, isto é, $g_j(x^*) = 0$. Então, e no caso geral de n variáveis e m restrições, as condições necessárias para a existência de um mínimo ligado, são

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^m \lambda_j \frac{\partial g_j}{\partial x_i} = 0, \dots, i = 1, \dots, n \\ g_j(x^*) = 0, \dots, j = 1, \dots, m \end{cases} \quad (15)$$

Tal como no caso de apenas duas variáveis e uma restrição, também o sistema (15) poderá ser determinado, através da derivação parcial da função Lagrangeana.

$$F(x, \lambda) = f(x) + \sum_{j=1}^m \lambda_j g_j(x) \quad (16)$$

A qualquer ponto satisfazendo as condições de (14) chamamos ponto estacionário ou ponto crítico de $f(x)$. Um ponto estacionário em que $f(x)$ toma um valor máximo ou mínimo é chamado um ponto extremo e o correspondente valor da função é um valor extremo. É de notar que nem todos os máximos ou mínimos ocorrem em pontos estacionários; por outro lado, nem todos os pontos estacionários correspondem a máximos ou mínimos.

ii) Condições Suficientes para um mínimo local ligado

É importante recordar que as condições expressas em (15) não são suficientes para a existência de um mínimo local ligado de $f(x)$. As condições suficientes envolvem derivadas de 2ª ordem e novas definições.

Tal como no caso de um extremo não condicionado, é possível expressar essas condições de segunda ordem sob a forma de um determinante. No caso de um extremo condicionado falamos em determinante Hessiano orlado.

Seja então $z = f(x)$ uma função de várias variáveis sujeita a restrições $g_i(x) = b_i$ com $i = 1, \dots, m$, em que as funções f e g_i são supostas possuírem derivadas parciais de primeira ordem com respeito a todas as variáveis e x é um vector de n componentes. Construa-se o determinante quadrado de ordem $m+n$, a que chamamos determinante Hessiano orlado $|\overline{H}|$ e que é da forma

$$|\overline{H}| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & g_1^1 & g_1^2 & \dots & g_1^n \\ 0 & 0 & \dots & 0 & g_2^1 & g_2^2 & \dots & g_2^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & g_m^1 & g_m^2 & \dots & g_m^n \\ g_1^1 & g_2^1 & \dots & g_m^1 & F_{11} & F_{12} & \dots & F_{1n} \\ g_1^2 & g_2^2 & \dots & g_m^2 & F_{21} & F_{22} & \dots & F_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ g_1^n & g_2^n & \dots & g_m^n & F_{n1} & F_{n2} & \dots & F_{nn} \end{vmatrix}$$

onde $g_i^j = \frac{\partial g_i}{\partial x_j}$ e F com índice duplo denota as derivadas de segunda

ordem da função de Lagrange, tal que $F_{kl} = \frac{\partial^2 F}{\partial x_k \partial x_l}$. A função $z = f(x)$

tem um máximo no ponto $x = x^*$ se os menores principais orlados $|\overline{H}_{m+1}|$, $|\overline{H}_{m+2}|$, ..., $|\overline{H}_n|$, alternam de sinal, sendo o sinal de $|\overline{H}_{m+1}|$ o mesmo de $(-1)^{m+1}$. Quando todos esses menores principais orlados têm o mesmo sinal, a saber o sinal de $(-1)^m$ então z tem um mínimo no ponto $x = x^*$.

Observações:

a) Sendo A_n um determinante quadrado de ordem n , entenda-se por menor principal de ordem k de A_n , o determinante que se obtém de A_n , suprimindo $(n-k)$ linhas e $(n-k)$ colunas.

b) Podemos formar vários menores principais orlados a partir de \overline{H} . O que contem F_{kk} como último elemento da sua diagonal principal, notamo-lo por $\overline{H_k}$.

c) A função de Lagrange pode tomar a forma

$$F(x, \lambda) = f(x) + \sum_{j=1}^m \lambda_j [b_j - g_j(x)] \dots, \text{onde} \dots g_j(x) = b_j \quad (17)$$

De facto, basta admitir as constantes b_j na função de restrição, de modo que, apareça $G_j(x) = 0$ na função de restrição, onde $G_j(x) = b_j - g_j(x)$.

- O tratamento clássico de restrições com desigualdades -

Consideremos o seguinte problema: pretende-se minimizar a função $z = f(x)$ sujeita a restrições

$$g_j(x) \leq 0 \dots j = 1, \dots, m \quad (18)$$

Repare-se que estas restrições com desigualdades podem ser transformadas em restrições com igualdades, bastando para tal adicionar variáveis não negativas, y_j^2 tais que

$$g_j(x) + y_j^2 = 0 \dots j = 1, \dots, m \quad (19)$$

sendo os y_j desconhecidos. Mas assim estamos em condições de aplicar o tratamento clássico de restrições com igualdades. De facto, o problema agora toma a forma: pretende-se minimizar a função $z = f(x)$

sujeita a restrições $G_j(x, y) = g_j(x) + y_j^2 = 0$ com $j = 1, \dots, m$, onde y é o vector dos y_j desconhecidos. O problema pode então ser resolvido utilizando os multiplicadores de Lagrange. Para tal, construa-se a função F tal que

$$F(x, y, \lambda) = f(x) + \sum_{j=1}^m \lambda_j G_j(x, y) \quad (20)$$

onde λ é o vector dos multiplicadores de Lagrange. Os pontos estacionários da função Lagrangeana podem ser determinados resolvendo as condições necessárias

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x_i}(x, y, \lambda) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) + \sum_{j=1}^m \lambda_j \frac{\partial g_j}{\partial x_i} = 0, \dots, i = 1, \dots, n \\ \frac{\partial F}{\partial \lambda_j}(x, y, \lambda) = G_j(x, y) = g_j(x) + y_j^2(x) = 0, \dots, j = 1, \dots, m \\ \frac{\partial F}{\partial y_j}(x, y, \lambda) = 2\lambda_j y_j = 0, \dots, j = 1, \dots, m \end{cases} \quad (21)+(22)+(23)$$

Observe-se que, da própria construção de $G_j(x, y)$, resulta que as equações (22) garantem que, de facto, $g_j(x) \leq 0, \dots, j = 1, \dots, m$ (porque somamos uma quantidade positiva com outro que, evidentemente é negativa, uma vez que o resultado é nulo). Por outro lado, a equações (23) implica que, ou $\lambda_j = 0$ ou $y_j = 0$. Introduza-se agora um novo conceito: o de restrições activas e inactivas.

Definição 6

Sejam $g_j(x) \leq 0$, m restrições a uma dada função $z = f(x)$. Às restrições g_j tais que $g_j(x) = 0$ no ponto óptimo, chamam-se restrições activas. As restrições g_j tais que $g_j(x) < 0$ no ponto óptimo, chamam-se restrições inactivas.

Voltando um pouco atrás, tínhamos visto que $2\lambda_j y_j = 0$ implicava $\lambda_j = 0$ ou $y_j = 0$. Se $\lambda_j = 0$, (logo $y_j \neq 0$), então $g_j < 0$ e as restrições são inactivas, pelo que não nos interessam. Se $y_j = 0$, então $g_j = 0$ (por (22)) e as restrições são activas no ponto óptimo. Designemos por G_1 o conjunto dos índices das restrições activas no ponto óptimo e por G_2 o conjunto dos índices de todas as restrições inactivas, tais que $G_1 + G_2$ representa o conjunto total dos índices das restrições. Então, para $j \in G_1$, $y_j = 0$, isto é, as restrições são activas; para $j \in G_2$, $\lambda_j = 0$ e as restrições são inactivas.

Podemos então resolver as equações (21) sob outra forma, atendendo a que

Se $j \in G_1 \Rightarrow g_j = 0$, ou seja $y_j = 0$.

Se $j \in G_2 \Rightarrow g_j < 0$, ou seja $\lambda_j = 0$.

$$\frac{\partial f}{\partial x_{ji}} + \sum_{j \in G_1} \lambda_j \frac{\partial g_j}{\partial x_i} = 0, \dots, i = 1, \dots, n \quad (24)$$

Analogamente, podemos reescrever as equações (22) tal que

$$g_j(x) = 0, \dots, j \in G_1. \quad (25)$$

$$g_j(x) + y_j^2 = 0, \dots, j \in G_2 \quad (26)$$

Prova-se ainda que, das equações (24), (25) e (26), no caso da determinação do mínimo local ligado, é $\lambda_j > 0, \dots, j \in G_2$ (Rao, 1979).

Resumindo, o sistema de equações necessárias para a determinação do mínimo local ligado é equivalente ao sistema

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_{j \in G_1} \lambda_j \frac{\partial g_j}{\partial x_i} = 0, \dots, i = 1, \dots, n \\ \lambda_j > 0, \dots, j \in G_1 \end{cases} \quad (27)$$

⁶ Às condições expressas neste sistema, chamamos condições de Kuhn Tucker, em homenagem aos seus autores, ou seja, as condições de Kuhn Tucker não são mais que as condições necessárias à existência de um mínimo local ligado, numa optimização de restrições com desigualdades, conforme exposto no início deste capítulo (o tratamento de restrições com desigualdades), contudo tais condições são apenas necessárias e não suficientes para garantirem a existência de um máximo local ligado. Há, todavia, uma classe de funções, funções côncavas e convexas, para as quais as condições de Kuhn Tucker são necessárias e suficientes na determinação do máximo global da função.

No caso de o conjunto das restrições activas ser desconhecido, as condições de Kuhn Tucker têm o seguinte aspecto:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^m \lambda_j \frac{\partial g_j}{\partial x_i} = 0 \dots i = 1, \dots, n \\ \lambda_j g_j = 0 \dots j = 1, \dots, m \\ g_j \leq 0 \dots j = 1, \dots, m \\ \lambda_j \geq 0 \dots j = 1, \dots, m \end{array} \right. \quad (28)$$

(Observe-se que estas são afinal as condições deduzidas anteriormente na determinação do mínimo de uma função sujeita a restrições com desigualdades; a “novidade” é que então λ_j pode ser também nulo).

Como observação final, se as restrições impostas fossem de tipo $g_j \geq 0$ e o problema de maximização, os valores de λ_j na equações (28) teriam de ser positivos.

Por outro lado se o problema for de minimização e as restrições do tipo $g_j \geq 0$ ou se o problema fôr de maximização e as restrições do tipo $g_j \leq 0$ os valores de λ_j na equações (28) teriam de ser negativos.

⁶ No caso dos problemas de maximização verifica-se que $\lambda_j < 0 \dots j \in G_1$.

Resumindo:

Condições de Kuhn Tucker

Condições de Kuhn Tucker num problema de minimização sujeito a restrições do tipo $g_j \leq 0$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^m \lambda_j \frac{\partial g_j}{\partial x_i} = 0 \dots\dots\dots i = 1, \dots, n \\ \lambda_j g_j = 0 \dots\dots\dots j = 1, \dots, m \\ g_j \leq 0 \dots\dots\dots j = 1, \dots, m \\ \lambda_j \geq 0 \dots\dots\dots j = 1, \dots, m \end{array} \right. \quad (29-1)$$

Condições de Kuhn Tucker num problema de maximização sujeito a restrições do tipo $g_j \geq 0$.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^m \lambda_j \frac{\partial g_j}{\partial x_i} = 0 \dots\dots\dots i = 1, \dots, n \\ \lambda_j g_j = 0 \dots\dots\dots j = 1, \dots, m \\ g_j \geq 0 \dots\dots\dots j = 1, \dots, m \\ \lambda_j \geq 0 \dots\dots\dots j = 1, \dots, m \end{array} \right. \quad (29-2)$$

Condições de Kuhn Tucker num problema de minimização sujeito a restrições do tipo $g_j \geq 0$.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^m \lambda_j \frac{\partial g_j}{\partial x_i} = 0 \dots\dots\dots i = 1, \dots, n \\ \lambda_j g_j = 0 \dots\dots\dots j = 1, \dots, m \\ g_j \geq 0 \dots\dots\dots j = 1, \dots, m \\ \lambda_j \leq 0 \dots\dots\dots j = 1, \dots, m \end{array} \right. \quad (30-1)$$

Condições de Kuhn Tucker num problema de maximização sujeito a restrições do tipo $g_j \leq 0$.

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^m \lambda_j \frac{\partial g_j}{\partial x_i} = 0 \dots\dots\dots i = 1, \dots, n \\ \lambda_j g_j = 0 \dots\dots\dots j = 1, \dots, m \\ g_j \leq 0 \dots\dots\dots j = 1, \dots, m \\ \lambda_j \leq 0 \dots\dots\dots j = 1, \dots, m \end{cases} \quad (30-2)$$

Funções Côncavas e Convexas

Definição 7

Chamamos conjunto convexo ao conjunto S de todos os pontos tais que, dados dois pontos de S , então o segmento de recta que os une ainda pertence ao conjunto.

Simbolicamente:

S é conjunto convexo \Leftrightarrow se para $x_1, x_2 \in S$, então $x \in S$ onde
 $x = \alpha x_2 + (1 - \alpha x_1) \dots \text{com} \dots \alpha \in [0, 1]$

Definição 8

Uma função $f(x)$ diz-se convexa sobre o conjunto convexo X se, para quaisquer dois pontos $x_1, x_2 \in X$ e para todo o $\lambda \in [0, 1]$ se tem

$$f(\lambda x_2 + (1 - \lambda x_1)) \leq \lambda f(x_2) + (1 - \lambda)f(x_1)$$

Isto é; se o segmento que une os dois pontos, está sempre acima ou coincide com o gráfico de $f(x)$.

Definição 9

Uma função $f(x)$ diz-se concava sobre o conjunto convexo X se, $-f(x)$ é convexa.

Isto é, se o segmento que une os pontos está sempre abaixo ou coincide com o gráfico de $f(x)$.

Teorema 6

Um mínimo local de uma função convexa num domínio convexo é também um mínimo global.

No caso de função objectivo ser estritamente convexa, esse mínimo global é único.

(Rao, 1979).

Teorema 7

Um máximo local de uma função concâva num domínio convexo é também em máximo global.

No caso de função objectivo ser estritamente concava, esse máximo global é único.

(Rao, 1979).

O Teorema da Suficiência de Kuhn Tucker

Já dissemos que, as condições de Kuhn Tucker apresentadas são apenas necessárias; na programação não linear, a formulação das condições suficientes, envolve conceitos como os de concavidade e convexidade.

Vamos de seguida enunciar um teorema, devido a Kuhn Tucker, conhecido por teorema da suficiência.

Teorema 8 (Teorema da Suficiência)

Dado o problema de minimizar $z = f(x)$ sujeita a restrições $g_i(x) \leq b_i \dots (i = 1, \dots, m)$ e $x \geq 0$ e se são satisfeitas as condições:

a) A função objectivo $f(x)$ é diferenciável e convexa no ortante não negativo;

b) Cada função da restrição $g_i(x)$ é diferenciável e concava no ortante não negativo;

c) O ponto \bar{x} satisfaz as condições de Kuhn Tucker para um mínimo.

Então \bar{x} é um mínimo global de $z = f(x)$.

(Chiang, 1982)⁷

⁷ Entenda-se por “ortante não negativo” o equivalente n-dimensional do quadrante não negativo. Tal como foi formulado acima, o teorema da Suficiência refere-se apenas a problemas de minimização. Mas a adaptação a problemas de maximização não é difícil; basta

O Custo Mínimo para um Determinado Nível de Produção

Os princípios básicos que norteiam o comportamento de uma empresa são análogos àqueles que condicionam o desempenho de um consumidor individual: o da maximização dos resultados e o da minimização dos custos.

Do ponto de vista do consumidor, essa maximização/minimização consiste em um indivíduo disfrutar o maior nível de satisfação decorrente da utilização de determinados bens, compatível com o mesmo nível de renda possível.

(Após tudo o que aqui foi dito sobre otimização, entendemos que, por facilidade de representação, seria melhor abordar apenas o caso de existência de dois bens).

Em termos de empresa, o ponto de tangência entre uma particular isoquanta e uma determinada isocusto identifica o ponto ótimo no que se refere à combinação ideal de recursos para uma certa quantidade de produto final.

i) A solução gráfica

Já vimos anteriormente que há várias combinações possíveis de input capazes de produzirem um determinado nível de produto final e que essa relação podia ser graficamente traduzida através de uma isoquanta. De um modo geral, cada ponto de uma isoquanta corresponde a um método específico de produção de determinado produto final. E, perante as alternativas tecnológicas, a empresa deve escolher o método ótimo que corresponda ao custo mínimo, para atingir esse nível de produção.

Suponhamos, por facilidade de exposição, que utilizamos somente dois factores de produção 1 e 2 de preços, respectivamente, w_1 e w_2 . Designemos novamente por x_1 e x_2 as quantidades dos inputs 1 e 2, respectivamente.

trocar as palavras “convexa” e “côncava” nas condições a) e b) e usar as condições de Kuhn Tucker para um “máximo” na alínea c).

Nestas circunstâncias a empresa contará com uma única isoquanta e uma família de isocustos. A questão fundamental é a da determinação da menor isocusto para que seja atingido determinado nível de produção pré-estabelecido. Graficamente, consideremos a figura junta

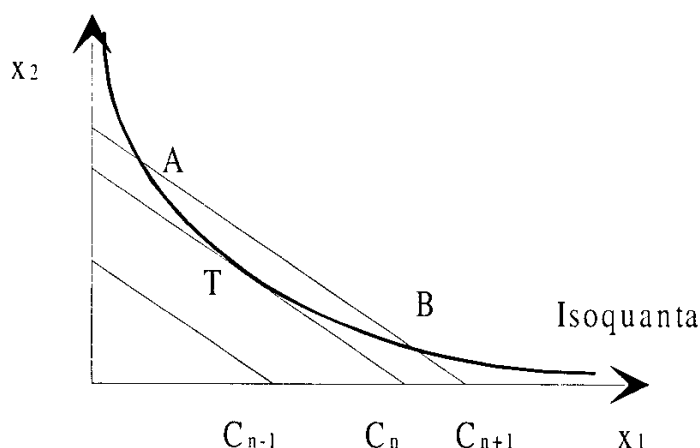


Figura 4 - Determinação da menor isocusto

Observando a figura, depreende-se que o nível de produção retratado pela isoquanta I, pode ser obtido pelos custos inerentes à isocustos C_n ou C_{n+1} . De facto, a isoquanta I intersecta as referidas isocustos nos pontos A, B e T. Contudo, a isocusto C_n retrata um nível de custos inferior. Consequentemente, o nível óptimo obtém-se para o ponto T onde a isocusto é tangente à isoquanta previamente estabelecida. Ou seja, tal ponto de tangência é condição fundamental para a minimização do custo. Resumindo, o problema da obtenção de um determinado nível de produção pelo menor custo possível, pode ser resolvido graficamente, começando com uma isoquanta específica (aquela que corresponde ao nível da produção que estamos a tentar produzir) que depois é colocada sobre um mapa de linhas de isocusto, correspondendo cada uma a diferentes níveis de custo. O ponto óptimo dos factores de produção de menor custo corresponde ao ponto de tangência entre uma linha de isocusto e a isoquanta especificada.

Recorde-se que o declive de uma isoquanta em qualquer ponto é igual a $-\frac{PM_1}{PM_2}$ e que a este quociente, não afectado do sinal menos se chama taxa

marginal de substituição técnica. Combinando isto com a ideia de que o custo mínimo ocorre num ponto de tangência com a linha de isocustos (cujo declive é $-\frac{w_1}{w_2}$) resulta que $\frac{PM_1}{PM_2} = \frac{w_1}{w_2}$ no ponto óptimo (x_1^*, x_2^*) , ou cruzando a multiplicação $\frac{PM_1}{w_1} = \frac{PM_2}{w_2}$ ou ainda $\frac{w_1}{PM_1} = \frac{w_2}{PM_2}$.

Observação: Entende-se por custo marginal $\frac{w_1}{PM_1}$ a variação verificada no custo total pela produção de mais uma unidade do produto final. A expressão $\frac{PM_1}{w_1}$ indica o produto marginal ponderado do factor 1.

ii) A solução analítica; o método dos multiplicadores de Lagrange

Condição Necessária

O problema matemático a resolver é o da minimização dos custos, condicionados a um dado nível de produção. Já vimos que a isocusto, de acordo com as notações adoptadas, é da forma $C = w_1x_1 + w_2x_2$. A restrição do problema, ou seja, a função produção correspondente a determinado nível da mesma, é $q = f(x_1, x_2)$.

Podemos resolver este problema de várias maneiras. Por exemplo, substituir a restrição na função a minimizar. Todavia, o processo mais geral e o que iremos aqui utilizar é o dos multiplicadores de Lagrange. Construa-se a função

$$F(x_1, x_2, \lambda) = w_1x_1 + w_2x_2 + \lambda[q - f(x_1, x_2)]$$

As condições necessárias à existência de um mínimo ligado devem verificar as equações (7.1) tal que

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x_1} = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial x_2} = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial \lambda} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (w_1 - \lambda \frac{\partial f}{\partial x_1})|_{(x_1^*, x_2^*)} = 0 \\ (w_2 - \lambda \frac{\partial f}{\partial x_2})|_{(x_1^*, x_2^*)} = 0 \\ q - f(x_1^*, x_2^*) = 0 \end{cases}$$

ou seja

$$\begin{cases} (w_1 - \lambda \frac{\partial q}{\partial x_1})|_{(x_1^*, x_2^*)} = 0 \\ (w_2 - \lambda \frac{\partial q}{\partial x_2})|_{(x_1^*, x_2^*)} = 0 \\ q - f(x_1^*, x_2^*) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} w_1 = \lambda \frac{\partial q}{\partial x_1} \\ w_2 = \lambda \frac{\partial q}{\partial x_2} \\ q = f(x_1, x_2) \end{cases} \quad (31)+(32)+(33)$$

Observe-se que a equação (33) é a própria restrição ao problema. Dividindo (31) por (32) vem

$$\frac{w_1}{w_2} = \frac{\lambda \frac{\partial q}{\partial x_1}}{\lambda \frac{\partial q}{\partial x_2}} \quad \text{ou seja} \quad \frac{w_1}{w_2} = \frac{\frac{\partial q}{\partial x_1}}{\frac{\partial q}{\partial x_2}}$$

De onde

$$\frac{\frac{\partial q}{\partial x_1}}{w_1} = \frac{\frac{\partial q}{\partial x_2}}{w_2}, \text{ isto é } \frac{PM_1}{w_1} = \frac{PM_2}{w_2}$$

Esta expressão, que estabelece que a razão da produtividade marginal de cada factor pelo respectivo preço deve ser igual ao quociente da produtividade marginal do outro factor pelo seu preço, é pois a condição necessária para a determinação do custo mínimo, condicionado a um dado nível de produção.

Condição Suficiente

Neste caso teremos de construir o determinante Hessiano orlado (ver resultado expresso em ii) do capítulo “funções com várias variáveis em que as restrições são expressas por igualdades”).

Como temos apenas uma restrição ($m=1$) a condição suficiente requer que todos os menores principais desse determinante sejam negativos. Ora

$$|\overline{H}| = \begin{vmatrix} 0 & \frac{\partial q}{\partial x_1} & \frac{\partial q}{\partial x_2} \\ \frac{\partial q}{\partial x_1} & -\lambda \frac{\partial^2 q}{\partial x_1^2} & -\lambda \frac{\partial^2 q}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial q}{\partial x_2} & -\lambda \frac{\partial^2 q}{\partial x_2 \partial x_1} & -\lambda \frac{\partial^2 q}{\partial x_2^2} \end{vmatrix}$$

Neste caso só há um menor principal orlado, a saber $|\overline{H}_3| = |\overline{H}|$ (temos $n=2$ e $m=1$). Então, a condição suficiente para que ocorra a minimização do custo para um dado nível de produção é que $|\overline{H}| < 0$. Mas, de (31), (32) e (33) vem

$$|\overline{H}| = \begin{vmatrix} 0 & \frac{w_1}{\lambda} & \frac{w_2}{\lambda} \\ \frac{w_1}{\lambda} & -\lambda \frac{\partial^2 q}{\partial x_1^2} & -\lambda \frac{\partial^2 q}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{w_2}{\lambda} & -\lambda \frac{\partial^2 q}{\partial x_2 \partial x_1} & -\lambda \frac{\partial^2 q}{\partial x_2^2} \end{vmatrix}$$

Atendendo às propriedades dos determinantes,

$$|\overline{H}| = \frac{1}{\lambda^2} \begin{vmatrix} 0 & w_1 & w_2 \\ w_1 & -\lambda \frac{\partial^2 q}{\partial x_1^2} & -\lambda \frac{\partial^2 q}{\partial x_1 \partial x_2} \\ w_2 & -\lambda \frac{\partial^2 q}{\partial x_2 \partial x_1} & -\lambda \frac{\partial^2 q}{\partial x_2^2} \end{vmatrix}$$

De onde, a condição suficiente toma a forma

$$\begin{vmatrix} 0 & w_1 & w_2 \\ w_1 & -\lambda \frac{\partial^2 q}{\partial x_1^2} & -\lambda \frac{\partial^2 q}{\partial x_1 \partial x_2} \\ w_2 & -\lambda \frac{\partial^2 q}{\partial x_2 \partial x_1} & -\lambda \frac{\partial^2 q}{\partial x_2^2} \end{vmatrix} < 0 \quad (34)$$

Só depois da determinação do ponto óptimo podemos chegar à função custo uma vez que esta traduz a optimização; ou seja, a função custo é a curva que contem os pontos óptimos.

Convem referir que, embora as derivadas parciais cruzadas $\frac{\partial^2 q}{\partial x_1 \partial x_2}$ e

$\frac{\partial^2 q}{\partial x_2 \partial x_1}$ tenham sido calculadas separadamente, elas são iguais desde que

sejam ambas contínuas. Este resultado é conhecido como **Teorema de Young**.

Neste caso, a ordem pela qual a diferenciação parcial é feita torna-se irrelevante, uma vez que $\frac{\partial^2 q}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2 q}{\partial x_2 \partial x_1}$.

Resumindo:

Dada a função produção $q = f(x_1, x_2)$ e a isocusto $C = w_1 x_1 + w_2 x_2$ podemos, recorrendo às condições necessárias para a determinação do ponto óptimo, relacionar os inputs tal que $x_2 = g(x_1)$, sendo g uma função. Uma vez satisfeita a condição suficiente e substituindo x_2 na função q , obtemos q em função de x_1 ; ou seja $q = h(x_1)$ e logo $x_1 = h^{-1}(q)$. Exprimindo ainda x_2 em função de q e substituindo na isocusto, encontramos finalmente a função custo total $C = r(q)$ (função óptima). Isto é, em situação óptima, a função custo relaciona os custos com as quantidades produzidas.

Um Exemplo Final

Uma empresa produz com uma função produção $Q = 4K^2 \sqrt{L}$, onde K e L representam capital e trabalho, respectivamente. Se o preço de uma unidade de trabalho é 1 e o preço de uma unidade de capital é 2, que quantidade de capital e de trabalho deve ela empregar se o seu objectivo é minimizar o custo?

Resolução:

Consideremos a empresa a utilizar apenas os bens “capital” e “trabalho”.

Pretende-se minimizar $C = L + 2K$ sujeita à restrição $Q = 4K^2 \sqrt{L}$.

Construa-se o Lagrangeano

$$F = L + 2K + \lambda(Q - 4K^2 \sqrt{L})$$

Começemos por estudar as condições necessárias.

Atendendo ao sistema 7.1, obtemos

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial L} = 1 - 2\lambda K^2 \frac{1}{\sqrt{L}} = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial K} = 2 - 8\lambda K \sqrt{L} = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial \lambda} = Q - 4K^2 \sqrt{L} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = \frac{\sqrt{L}}{2K^2} \\ \lambda = \frac{1}{4K\sqrt{L}} \\ Q = 4K^2 \sqrt{L} \end{cases}$$

Igualando os valores de λ , podemos exprimir o capital em função do trabalho.

$$\frac{\sqrt{L}}{2K^2} = \frac{1}{4K\sqrt{L}} \Leftrightarrow 4KL = 2K^2$$

Logo $K = 2L$.

Substituindo na função produção podemos exprimi-la apenas como função de L

$$Q = 16\sqrt{L^5}$$

Passemos agora à condição suficiente.

Utilizando as condições de segunda ordem e atendendo ao Teorema de Young, temos sucessivamente,

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial K^2} = 8\sqrt{L}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial K} = 8K\sqrt{L} \quad \frac{\partial^2 Q}{\partial L^2} = -\frac{K^2}{\sqrt{L^3}}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial L} = \frac{2K^2}{\sqrt{L}} \quad \frac{\partial^2 Q}{\partial L \partial K} = \frac{\partial^2 Q}{\partial K \partial L} = \frac{4K}{\sqrt{L}} \dots\dots\dots (\text{Teorema de Young})$$

Construa-se e calcule-se o hessiano orlado e exprimam-se os resultados em função de L.

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & \lambda K^2 \frac{1}{\sqrt{L^3}} & -\lambda 4K \frac{1}{\sqrt{L}} \\ 2 & -\lambda 4K \frac{1}{\sqrt{L}} & -\lambda 8\sqrt{L} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & \frac{1}{2L} & -\frac{1}{L} \\ 2 & -\frac{1}{L} & \frac{2}{K} \end{vmatrix} = -\frac{5}{L}$$

Mas então a condição suficiente é satisfeita, uma vez que $-\frac{5}{L}$ é negativo (supomos que, para haver eficiência o trabalho é positivo).

Exprimindo agora o capital e o trabalho como função de Q, encontramos

$$L = 5\sqrt{\left(\frac{Q}{16}\right)^2} \quad \text{e} \quad K = 2\sqrt{\left(\frac{Q}{16}\right)^2}$$

Finalmente, substituindo no custo encontramos a função custo total que procurávamos. Onde $C = 5\sqrt{\left(\frac{Q}{16}\right)^2}$ é a função óptima procurada.

Bibliografia:

Casson, M. (1973) *Introduction to Mathematical Economics*. London, Willian Clowes & Sons.

Chacholiades, M. (1986) *Micro-economics*. London, Collier Macmillan Publishers.

Chiang, A. (1982) *Matemática para Economistas*. São Paulo, McGraw-Hill.

Frank, R. H. (1994) *Microeconomia e Comportamento*. Lisboa, McGraw-Hill.

Garófalo, G. L. e Carvalho, L. C. P. *Teoria Microeconómica*. São Paulo, Editora Atlas S. A.

Henderson, J. M. e Quandt, R. E. (1972) *Microéconomie*. Paris, Dunod.

PisKounov, N. (1979) *Cálculo Diferencial e Integral*. Porto, Lopes da Silva Editoras.

Rao, S. S. (1979) *Optimization Theory and Applications*. Calcutta, Wiley Eastern Limited.

Varian, H. R. (1984) *Microeconomic Analysis*. London, W. W. Norton & Company.

Varian, H. R. (1990) *Intermediate Microeconomics*. London, W. W. Norton & Company.